1ο ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΩΝ

Εστω $\varphi: O \to K$ επιμορφισμός.
Τότε υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ $O/\ker\varphi$ και K

Απόδειξη

Ορίζουμε $\bar{\varphi}: O/\ker\varphi \to K$, όπου θεωρώ $Y=\ker\varphi$
Αρα, εχουμε:
$$\bar{\varphi}: O/Y \to K \quad \text{τέτοιο} \quad \bar{\varphi}(Ya)=\varphi(a)$$
Εαν η πράξη είναι καλά ορισμένη, ανεξάρτητη από τον κάθε αντιπρόσωπό της, η $\bar{\varphi}$ ομομορφισμός, 1-1 και επί τότε θα εχουμε δείξει το ζητούμενο του θεωρήματος

1) $Ya=Yb \Leftrightarrow Yab^{-1}=Y \Leftrightarrow ab^{-1}\in Y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varphi(a)\cdot\varphi(b)^{-1}=e \Leftrightarrow \varphi(a)=\varphi(b) \Leftrightarrow \bar{\varphi}(a)=\bar{\varphi}(b)$.

Αρα, δο $\bar{\varphi}(a)=\bar{\varphi}(b) \Leftrightarrow \varphi(a)=\varphi(b)$

2) $\bar{\varphi}(YaYb)=\bar{\varphi}(Yab)=\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)=\bar{\varphi}(Ya)\cdot\bar{\varphi}(Yb)$

3) $\bar{\varphi}$ 1-1 $\Leftrightarrow \ker\bar{\varphi}=\{Y\}$
Αν $\bar{\varphi}(Ya)=1 \Rightarrow \varphi(a)=1 \Rightarrow a\in Y \Rightarrow aY=Ya=Y$
και τοτε $\ker\bar{\varphi}=\{Y\}$

4) Απομενει νδο $\bar{\varphi}$ επι
Εστω τυχον $x\in K$ τοτε $\exists a\in O: \varphi(a)=x \Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{\varphi}(Ya)=x$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

$$\begin{tikzcd} O \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & K \\ & O/Y \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd} \qquad \varphi=\bar{\varphi}\circ\pi \quad , \quad \pi(a)=Ya.$$

2º ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΩΝ

Εστω $Y, T \leq O$ και $T \trianglelefteq O$, τότε υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των: $Y/Y\cap T$ και YT/T

Απόδειξη

Πρώτα θδο $Y/Y\cap T$, YT/T ορίζονται $\Leftrightarrow$ $Y\cap T \trianglelefteq Y$, $T \trianglelefteq YT$.

Για το πρώτο:

Εστω $\alpha \in Y$ και $\beta \in Y\cap T$ και ισχυριζόμαστε: $\alpha\beta\alpha^{-1} \in (Y\cap T)$

$\Rightarrow$ $\alpha\beta\alpha^{-1} \in Y$ και $\alpha\beta\alpha^{-1} \in T$.

Όπου, $\alpha, \alpha^{-1} \in Y \leq O$ και $\beta \in Y\cap T \Rightarrow \beta \in Y$.

Αρα, αφου $Y \leq O$ ιδιότητα κλειστου $\Rightarrow$ $\alpha\beta\alpha^{-1} \in Y$

Επίσης, $\beta \in T$ και $\alpha \in O$, αφου $T \trianglelefteq O \Rightarrow \alpha\beta\alpha^{-1} \in T$.

Αποδείχθηκε.

Για το δευτερο:

$YT = \{\alpha\beta \mid$ για όλα τα $\alpha \in Y, \beta \in T\}$

Ας ειναι $\alpha, \gamma \in Y$ και $\beta, \delta \in T$

Θδο $\alpha\beta\gamma\delta \in YT$.

$$\alpha\beta\gamma\delta = \alpha\gamma\underbrace{\gamma^{-1}\beta\gamma}_{T\trianglelefteq O,\ \in T}\delta = \underbrace{\alpha\gamma}_{\substack{Y\leq O\\ \in Y}}\underbrace{\tilde{\jmath}\delta}_{\substack{\in T\\ T\leq O}} \in T.$$

Εστωσαν $\alpha \in Y$, $\beta \in T$ και θδο $(\alpha\beta)^{-1} \in YT$

$$(\alpha\cdot\beta)^{-1} = \underbrace{\beta^{-1}}_{\in T}\cdot\alpha^{-1} \underset{T\trianglelefteq O}{=} \alpha^{-1}\underbrace{\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}}_{\in T} = \underbrace{\alpha^{-1}}_{\in Y}\cdot\underbrace{\varepsilon}_{\in T} \in YT.$$

Αρα, $YT \leq O$

όμως $T \trianglelefteq O$ και $YT \leq O \Rightarrow T \trianglelefteq YT$.

Συνεπως, ορίζονται τα παραπάνω σύνολα πηλίκων.

Έτσι, ορίσαμε τον επιμορφισμό $\varphi : Y \to YT/T$ (τοδείχναμε) και θα δείξαμε ότι $\ker\varphi = Y\cap T$. Η απεικόνιση φ έχει τύπο: $\varphi(\alpha) = T\alpha$. Για να βρεθεί ο πυρήνας:

Αν $\varphi(\alpha) = T \Leftrightarrow T\alpha = T \Leftrightarrow \alpha \in T$ και $\alpha \in Y \Leftrightarrow \alpha \in Y\cap T$.

3^{o} ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΩΝ·

Έστω $Y, T \triangleleft O$ με $Y \triangleleft T$, τότε υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των: $(O/Y)/(T/Y)$ και O/T

Απόδειξη

Πρέπει πρώτα νδο το σύνολο $T/Y \triangleleft O/Y$

καταρχάς να αποδείξουμε την υποσυνολική σχέση:

$T/Y = \{Y\beta \,/\, \beta \in T\} \subseteq \{Ya \,/\, a \in O\} = O/Y$

Ως προς την κλειστότητα της πράξης:

Έστωσαν $\beta, \gamma \in T \Rightarrow Y\beta \odot Y\gamma = Y\beta\gamma \in T/Y$ (αφού $Y, T \leq O$)

Έστω το $\beta \in T \Rightarrow (Y\beta)^{-1} = Y\beta^{-1} \in T/Y$ (αφού $T \leq O$).

Επομένως, $T/Y \leq O/Y$

Έστωσαν, τώρα $a \in O$ και $\beta \in T$, τότε παίρνουμε:

$(Ya)(Y\beta)(Ya)^{-1} = Ya\beta a^{-1} \in T/Y$ (αφού $T \triangleleft O$)

Επομένως, $T/Y \triangleleft O/Y \Rightarrow$ ορίζεται η ομάδα: $O/Y \big/ T/Y$

Με στοιχεία μορφής:

$(T/Y)(Ya)$, $a \in O$ και πράξη

$(T/Y)\,Ya \odot (T/Y)Y\beta = (T/Y)(Ya \odot Y\beta) = (T/Y)(Ya\beta)$.

Ορίζουμε τώρα τον επιμορφισμό: $\varphi: O/Y \to O/T$.

Η φ είναι καλά ορισμένη (δηλ. ανεξ. του αντιπροσώπου)

με τύπο $\varphi(Ya) = Ta$, $\forall a \in O$.

Εάν λοιπόν $Ya = Y\beta \Leftrightarrow Ya\beta^{-1} = Y \Leftrightarrow a\beta^{-1} \in Y \subseteq T \Rightarrow$

$\Rightarrow a\beta^{-1} \in T \Rightarrow Ta\beta^{-1} = T \Rightarrow Ta = T\beta$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι φ ομομορφισμός και επί

Για να βρούμε τον πυρήνα της φ

Έστω $\varphi(Ya) = T \Rightarrow Ta = T \Rightarrow a \in Ta \Rightarrow Ya \in (T/Y)$

Άρα, $\ker\varphi \subseteq T/Y$. Για το αντίστροφο, τώρα

αν $a \in Ta \Rightarrow \varphi(Ya) = Ta = T \Rightarrow (T/Y) \subseteq \ker\varphi$

Από το πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών έχουμε

ότι, $\exists\ \bar{\varphi}: O/Y \big/ \ker\varphi \longrightarrow O/T$.

Άρα, προκύπτει άμεσα το ζητούμενο